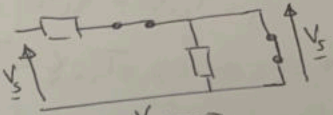
Corrigé d'ex 5 - TD 2

① L'étude qualitative :

en BF : $\omega \longrightarrow 0$

$\underline{V_s} = 0$

en HF : $\omega \longrightarrow \infty$



$\underline{V_s} = 0$

Donc pour les fréquences intermédiaire $\underline{V_s} \neq 0$, Il s'agit d'un filtre passe_bande

2 - $T(j\omega) = \dfrac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = ?$

* En appliquant le théorème de Millman au noeud A.

$$\underline{V_A} = \frac{\frac{\underline{V_e}}{R+Z_c}}{\frac{1}{R+Z_c} + \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_c}}$$

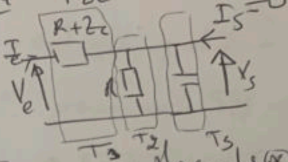
on remarque que $\underline{V_A} = \underline{V_s}$

$$T(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\frac{1}{R+Z_c}}{\frac{1}{R+Z_c} + \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_c}} = \frac{1}{1 + 1 + \frac{Z_c}{R} + \frac{R}{Z_c} + 1}$$

$$\Rightarrow T(j\omega) = \frac{1}{3 + \frac{1}{jC\omega R} + jC\omega R}$$

* une autre méthode

on calcul T_{22} ? tq $T(j\omega) = \dfrac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \dfrac{1}{T_{22}}$



$$\begin{cases} \underline{V_s} = T_{11}\underline{V_e} - T_{12}\underline{I_e} \quad (*) \\ \underline{I_s} = T_{21}\underline{V_e} - T_{22}\underline{I_e} \end{cases}$$

or $\underline{I_s} = 0 \Rightarrow T_{21}\underline{V_e} = T_{22}I_e$, on remplace ds (*),

on trouve $\underline{V_s} = T_{11}\underline{V_e} - T_{12}\dfrac{T_{21}}{T_{22}}V_e$.

$\Rightarrow \underline{V_s} = \dfrac{\Delta T}{T_{22}}\underline{V_e}$ $\quad \Delta T \to 1$ (Q passif)

$\Rightarrow \dfrac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \dfrac{1}{T_{22}}$.

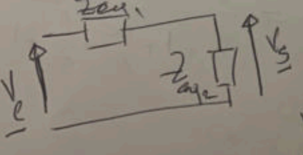
$$T_{eq} = T_3 \times T_2 \times T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_c} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/R & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & R+Z_c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

d'où $T(j\omega) = \dfrac{1}{T_{22}}$.

. Autre méthode

en posant $Z_{eq_1} = R + Z_c$ et $Z_{eq_2} = (R \parallel C)$.



. en utilisant le diviseur de tension

$$\underline{V_s} = \frac{Z_{eq_2}}{Z_{eq_1} + Z_{eq_2}}\underline{V_e}$$

donc $$\underline{V}_s = \frac{\frac{R\cdot Z_c}{R+Z_c}}{\frac{R\cdot Z_c}{R+Z_c} + R + Z_c}\underline{V}_e$$

$$\Rightarrow \underline{V}_s = \frac{R\cdot Z_c}{R\cdot Z_c + (R+Z_c)^2} = \frac{R\cdot Z_c}{R^2+Z_c^2+3R\cdot Z_c}$$

$$\Rightarrow \underline{V}_s = \frac{1}{\frac{R}{Z_c} + \frac{Z_c}{R} + 3} = \frac{1}{3+jC\omega R+\frac{1}{jC\omega R}}\underline{V}_e$$

on peut mettre cette fonction de transfert sous la forme suivante

$$T(j\omega) = \frac{1}{3+jC\omega R+\frac{1}{jC\omega R}} = \frac{1/3}{1+\frac{1}{3}j\left(C\omega R-\frac{1}{C\omega R}\right)}$$

$$= \frac{T_0}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$$

avec $T_0 = \frac{1}{3}$; $Q = \frac{1}{3}$ $\Big|$ $x = C\omega R = \frac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{CR}$

3) $T_0 = \frac{1}{3} = T_{max}$

$$G_{max_{dB}} = 20\log\frac{1}{3} = -20\log 3 = -9{,}5\,dB$$

$$\varphi = \arg T_0 = \arg\frac{1}{3} = 0$$

④ Les limites de la bande passante à -3 dB sont donc les fréquences de coupure vérifient la relation suivante $|T(j\omega)| = \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$.

$$\Rightarrow \frac{1/3}{\sqrt{1+\frac{1}{9}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{c.à.d } x^2-1 = \pm 3x.$$

cette équation admet quatre racines $x = \frac{\pm 3 \pm \sqrt{13}}{2}$,

on garde que les racines positives (pulsation est tjs positive)

d'où
$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} = \frac{\omega_1}{\omega_0} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = \frac{\omega_2}{\omega_0} \end{cases}$$

donc
$$x_1 = 0{,}3 \Rightarrow \omega_1 \simeq 0{,}3\,\omega_0$$
$$x_2 = 3{,}3 \Rightarrow \omega_2 \simeq 3{,}3\,\omega_0$$

$$\Delta x = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_0} = 3 \Rightarrow \Delta\omega = 3\omega_0.$$

$$BP = [\omega_1, \omega_2]$$

Or $Q = \frac{1}{3}$ on a $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{3}$

on retrouve bien l'une des définitions de facteur de qualité $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$

5- $\varphi = \arg T_0 - \operatorname{Arg}\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$

$= 0 - \arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$

$\varphi_{(x=x_1)} = -\arg\left(1 + jQ\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\right) = -\operatorname{arctg} \frac{Q\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)}{1}$

$= -\operatorname{arctg} \frac{0{,}3 - \frac{1}{0{,}3}}{3} \simeq +\frac{\pi}{4}$.

$\varphi(x = x_2) = -\operatorname{arctg} \frac{x_2 - \frac{1}{x_2}}{3} \simeq -\frac{\pi}{4}$

6-

$x \gg 1 \quad G_{dB} \longrightarrow -20 \log x$.

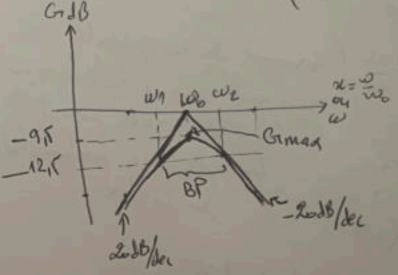
$\varphi \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$.

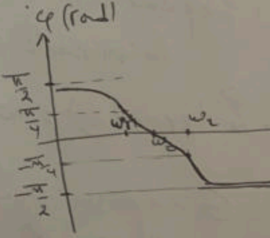
$x \ll 1 \quad G_{dB} \longrightarrow 20 \log x$.

$\varphi \longrightarrow \frac{\pi}{2}$.

$x = 1 \quad G_{dB} = -9{,}5 \text{ dB}$.

$\varphi \longrightarrow 0 \text{ rad}$





7 $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ A.N $\underline{\omega_0 = 2000 \text{rad}/s^{-1}}$.

on a le signal d'entrée sous cette forme

$$V_e(t) = \underbrace{V_0}_{\text{la composante continue}} + \underbrace{V_0 \sin(\omega t) + V_0 \sin(10\omega t) + V_0 \sin(100\omega t)}_{\text{les composantes sinusoïdale}}$$

Chaque composante prise indépendament et transformée par le filtre en une composante du signal de sortie

. Le terme ①: est la composante continue de signal d'entrée

Le filtre passe bande coupe les composantes de basses fréquences et notamment le continu. c.à.d le filtre coupe la composante continue.

Le terme ②: $\omega = 100 = \frac{\omega_0}{20}$ (~~le signal~~ cette composante de signal a une pulsation ω qui se trouve avant la pulsation fondamentale du filtre)

Si on a un signal d'entrée sous cette forme $V_e(t) = V_{e\,max} \sin(\omega t)$

après filtrage $V_s(t) = V_{s\,max} \sin(\omega t + \varphi)$

$$= |T(\omega)| \cdot V_{e\,m} \sin(\omega t + \arg T(j\omega))$$

$$= 10^{G_{dB}/20} V_{e\,m} \sin(\omega t + \arg(T(j\omega)))$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ avec $T(\omega) = \frac{|V_s|}{|V_e|} = \frac{V_{s,max}}{V_{e,max}}$

et $G_{dB} = 20\log T(\omega) \Rightarrow \underline{T(\omega) = 10^{G_{dB}/2}}$

Donc, on peut déduire l'expression exacte de $V_s(t)$

$$V_s(t) = \frac{V_0}{20}\sin(\omega t + \underbrace{1,42}_{\varphi = -\arctan\frac{\frac{1}{20}-}{3}})$$

le signal de sortie est atténué d'un facteur $\left(\frac{1}{20}\right)$ en amplitude, ce qui correspond à une atténuation de $-26\,dB$, et déphasé de $1,42$

le terme (B) : $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}$

de m̂, on trouve $V_s(t) = \frac{V_0}{2}\sin(\omega t + 0,46)$

le terme (C) : $\frac{\omega}{\omega_0} = 50$

$$v_s(t) = \frac{V_0}{50}\sin(\omega t - 1,5)$$

le signal est atténué d'un facteur $\left(\frac{1}{50}\right)$ en amplitude, et déphasé de $-1,5\,rad$.

donc le signal de sortie du filtre s'écrit :

$$V_s(t) \simeq \frac{V_0}{20}\sin(\omega t + 1,42) + \frac{V_0}{2}\sin(\omega t + 0,46) + \frac{V_0}{50}\sin\left(\frac{\omega t}{100} - \right.$$